

Die gebrochenrationale Funktion

Definition:

Unter einer gebrochenrationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen, d.h. Funktionen der Form

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$$

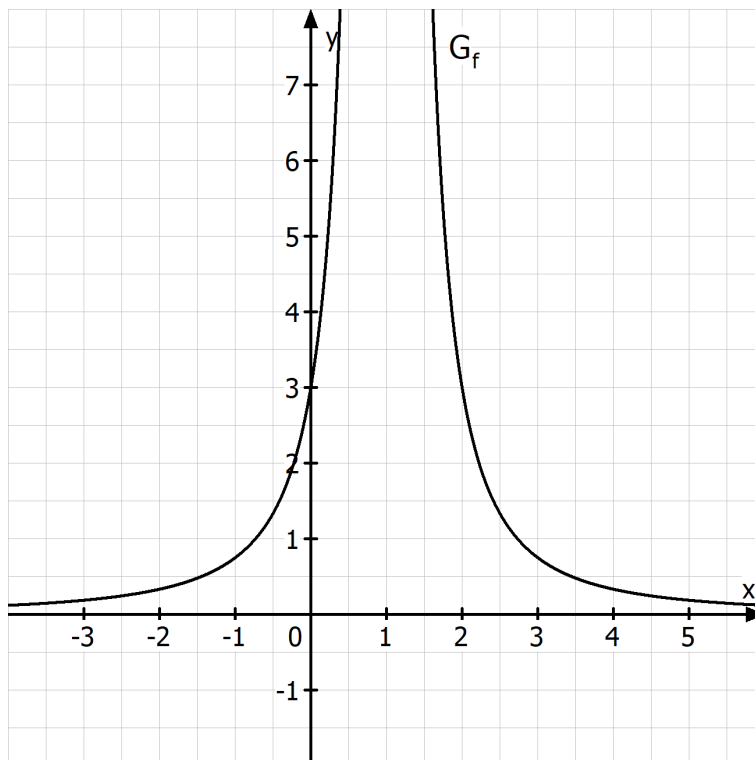
(wobei $x_1, \dots, x_k$ Nullstellen der ganzrationalen Funktion im Nenner sind), $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

Der Funktionsterm besteht aus dem Zählerpolynom vom Grad n und dem Nennerpolynom vom Grad m .

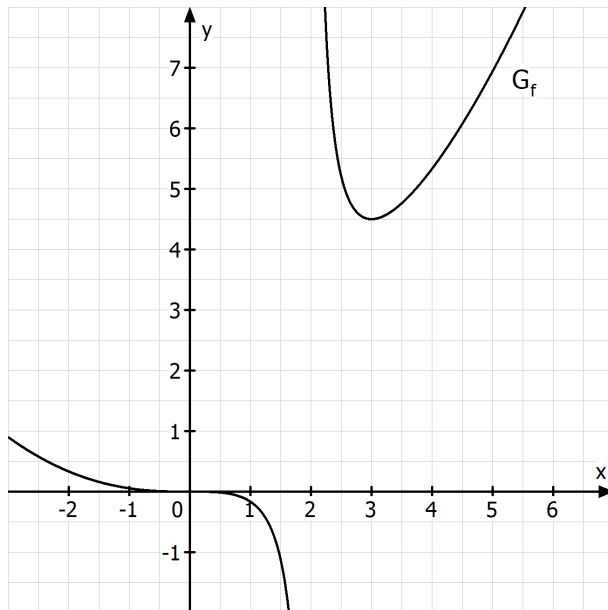
Ist $n < m$ ($n \geq m$), so heißt f echt (unecht) gebrochenrationale Funktion.

Beispiele:

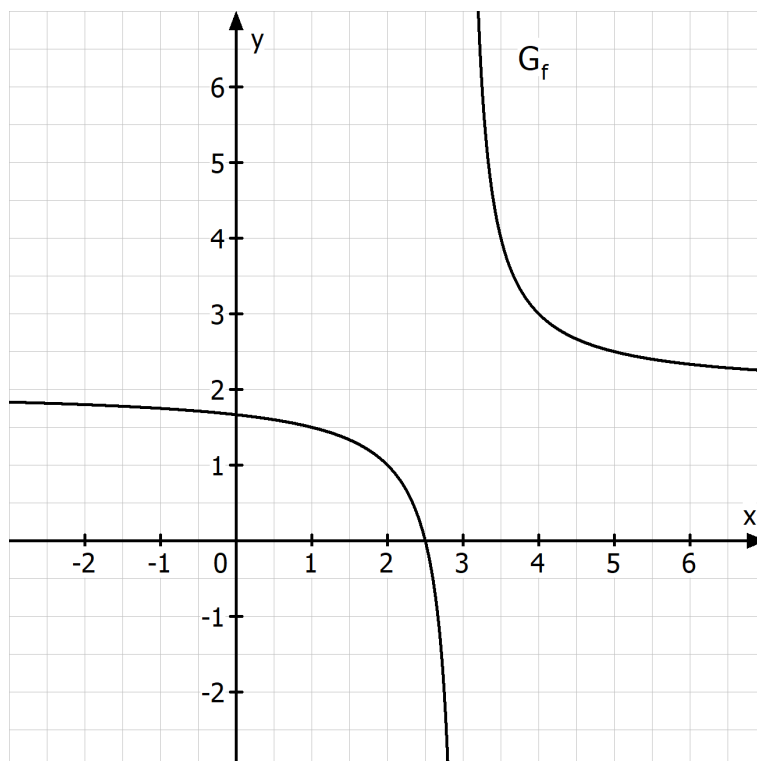
1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ „echt gebrochenrationale Funktion“



2) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$ „unecht gebrochenrationale Funktion“



3) $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$ „unecht gebrochenrationale Funktion“



Eigenschaften der gebrochenrationalen Funktionen

(1) Definitionsmenge:

Der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion darf nie Null werden.

Beispiele:

$$1) f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2) f(x) = \frac{x^3}{6x-12} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$3) f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 = 0 &\Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \\ &\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\} \end{aligned}$$

(2) Stetig behebbare Definitionslücken und Polstellen (Unendlichkeitsstellen):

Lässt sich aus dem Nenner des Funktionsterm einer gebrochenrationalen Funktion ein Faktor $(x-x_0)^n$ vollständig kürzen, so hat man an dieser Stelle x_0 ein „Loch“ im Funktionsgraphen (stetig behebbare Definitionslücke).

Lässt sich ein Faktor $(x-x_0)^n$ nicht vollständig oder überhaupt nicht aus dem Nenner kürzen, so spricht man von einer Polstelle (Unendlichkeitsstelle) n-ter Ordnung. Im Graphen der gebrochenrationalen Funktion hat man dann eine Parallele zur y-Achse (senkrechte Asymptote).

Beispiele:

$$1) f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

$x = 1$ ist eine Polstelle 2. Ordnung (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel)

$$2) f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$$

$x = 2$ ist Polstelle 1. Ordnung (Polstelle mit Vorzeichenwechsel)

$$3) f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2(x - \frac{5}{2})(x - 4)}{(x-3)(x-4)}$$

$x = 3$ ist Polstelle 1. Ordnung

$x = 4$ ist stetig behebbare Definitionslücke

Unterscheidung Polstelle 1. Ordnung und Polstelle 2. Ordnung:

Polstelle 1. Ordnung: Vorzeichen der Funktionswerte wechselt an der Stelle x_0 .

Polstelle 2. Ordnung: Vorzeichen der Funktionswerte bleiben gleich in der Umgebung von x_0 .

In der Umgebung einer Polstelle x_0 gilt: $x \xrightarrow{<} x_0 \quad f(x) \rightarrow \pm\infty$ bzw. $x \xrightarrow{>} x_0 \quad f(x) \rightarrow \pm\infty$.

(3) Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion:

Bedingung: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Rightarrow p(x) = 0$

Beispiele:

1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

$$\frac{3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 3 = 0 \text{ (f)} \Rightarrow f \text{ hat keine Nullstellen}$$

2) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$

$$\frac{x^3}{6x-12} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (dreifache Nullstelle)}$$

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$

$$\frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow (x_1 = 4) \notin D_f \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f \text{ hat eine Nullstelle bei } x = \frac{5}{2}$$

(4) Gleichungen von nichtsenkrechten Asymptoten:

Die Gleichung der nichtsenkrechten Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion hängt vom Grad n der Zählerfunktion und vom Grad m der Nennerfunktion ab.

a) $n < m$: f ist eine echt gebrochenrationale Funktion

Der Funktionsgraph nähert sich für $x \rightarrow \pm\infty$ immer mehr der x -Achse an.

Die x -Achse ist eine horizontale Asymptote.

b) $n = m$:

f ist eine unecht gebrochenrationale Funktion und kann durch Polynomdivision in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt werden.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$

$$(2x^2 - 13x + 20) : (x^2 - 7x + 12) = 2 + \frac{x - 4}{\underbrace{x^2 - 7x + 12}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}} \Rightarrow y = 2 \text{ ist waagrechte Asymptote}$$

Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine konstante Funktion ($y = c$). Die Gerade $y = c$ ist dann eine horizontale Asymptote des Graphen G_f .

Mögliche Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Asymptote:

$$\frac{x - 4}{x^2 - 7x + 12} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow (x = 4) \notin D_f$$

$\Rightarrow$ die waagrechte Asymptote $y = 2$ und der Funktionsgraph G_f haben keinen Schnittpunkt

c) $n = m + 1$:

Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine lineare Funktion $y = ax + b$ (schiefe Asymptote).

d) $n > m + 1$:

Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - m$ (Asymptotenkurve).

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$

$$x^3 : (6x-12) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \underbrace{\frac{8}{6x-12}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \text{ ist Asymptotenkurve}$$

$\Rightarrow$ die Asymptotenkurve und der Funktionsgraph haben keinen Schnittpunkt,

$$\text{da } \frac{8}{6x-12} \neq 0 \text{ für alle } x \in D_f.$$

(5) Symmetrie:

Für die Symmetrie einer Funktion f gilt:

- a) Ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so ist die Funktion achsensymmetrisch zur y -Achse.
 b) Ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, so ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele:

1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

$$f(-x) = \frac{3}{((-x)-1)^2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow G_f$ ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y -Achse

2) $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 5(-x)}{-x} = \frac{-x^3 - 5x}{-x} = \frac{x^3 + 5x}{x} = f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse

3) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^3 + 2x}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 2}{(-x)^3 + 2(-x)} = \frac{x^4 + 2}{-x^3 - 2x} = -\frac{x^4 + 2}{x^3 + 2x} = -f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Der Graph G_f einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn G_p und G_q beide achsensymmetrisch zur y-Achse oder beide punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

Der Graph G_f einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn G_p und G_q verschiedenartiges Symmetrieverhalten aufweisen.

Aufgaben:

- 1 Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die maximale Definitionsmenge, Art der Definitionslücken, die Nullstellen, das Symmetrieverhalten sowie das Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ und skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf des Graphen G_f der Funktion f. ○

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{5x - 2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

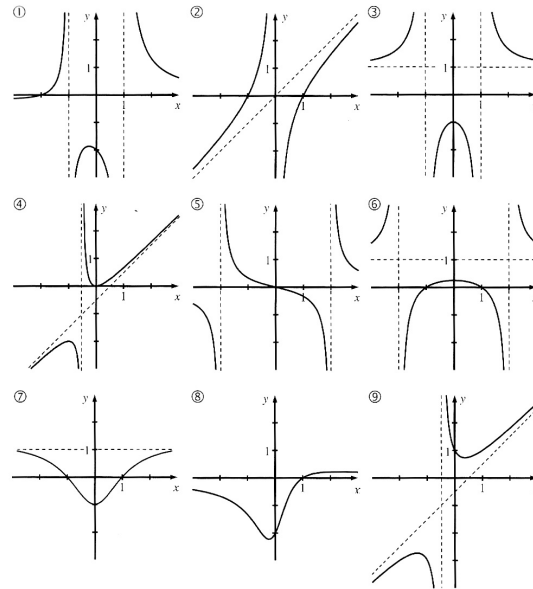
d) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x - 3}$

2 Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von Funktionen der Form

$$f_{a,b}(x) = \frac{x^2 + a}{x + b}, \quad g_{a,b}(x) = \frac{x + a}{x^2 + b} \quad \text{oder} \quad h_{a,b}(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + b}.$$

Ordnen Sie die Graphen dem richtigen Typ zu und bestimmen Sie aus der Zeichnung die

Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$. 



3.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f .

3.1 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem. ☒

3.2 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ am Rande der Definitionsmenge und klassifizieren Sie die Definitionslücken. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an. ☐

3.3 Berechnen Sie alle Nullstellen von f . ☒

3.4 Berechnen Sie Art und Koordinaten aller Punkte von G_f mit waagrechter Tangente. ☒

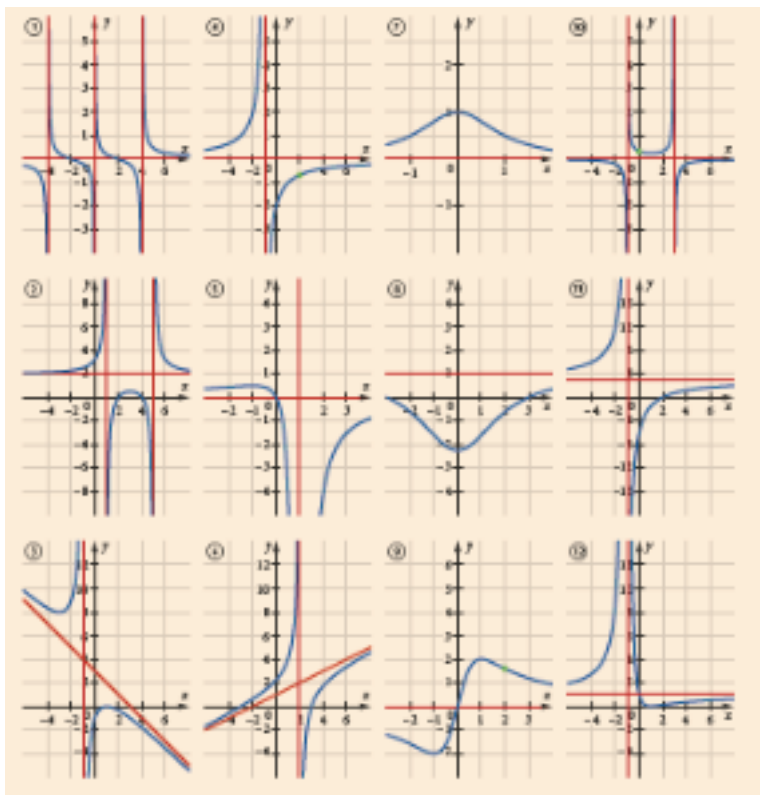
3.5 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und geben Sie den Wendepunkt von G_f an. ☒

3.6 Erstellen Sie eine Wertetabelle mit $x \in \{-5; -2,25; -1,75; 0; 1,75; 2,25; 5\}$. ☐

3.7 Zeichnen Sie G_f für $-5 \leq x \leq 5$ und alle Asymptoten. ☐

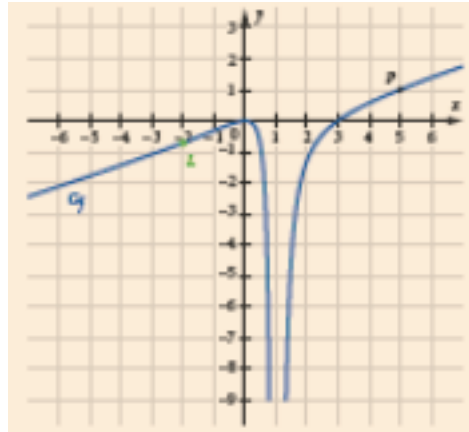
4 Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung die richtige Nummer eines Graphen zu. 

$$\begin{aligned}
 a(x) &= \frac{3x-6}{x+1} & b(x) &= \frac{-2x+4}{x^2-x-2} & c(x) &= \frac{x(4x-8)}{(x-2)(x^2+1)} \\
 d(x) &= \frac{9-x^2}{4-2x} & e(x) &= \frac{-2x}{(x-1)^2} & f(x) &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \\
 g(x) &= \frac{1}{x^2+1} & h(x) &= 1 - \frac{13}{x^2+4} & i(x) &= \frac{x}{3x+2x^2-x^3} \\
 k(x) &= \frac{x^2-4}{x^3-16x} & l(x) &= \frac{2x^2-12x+16}{(x-1)(x-5)} & m(x) &= -\frac{x^2-2x+1}{x+1}
 \end{aligned}$$



5 Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm zu dem gegebenen Graphen.

Der Punkt $P(5/1)$ liegt auf dem Graphen. Die Funktion hat die Definitionslücke $L(-2/y_L)$. Die vertikale Asymptote geht durch den Punkt $V(1/-3,94785)$. 



6 Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion hat bei $x = 2$ eine behebbare Lücke und an der Stelle $x = 3$ eine Unendlichkeitsstelle. Die x -Achse ist Asymptote. Die x -Achse wird an der Stelle $x = 1$ geschnitten. Geben Sie zwei Funktionsgleichungen an, die diese Bedingungen erfüllen. 

7.0 Die Preis-Absatz-Funktion für das Gut eines Monopolisten lautet $p(x) = 375 - 40x$.

Die Herstellung des Produkts verursacht Kosten, die durch die Funktion K wiedergegeben werden mit $K(x) = 5x^3 - 40x^2 + 120x + 250$. 

7.1 Ermitteln Sie mit einem digitalen Hilfsmittel die kostengünstigste Produktionsmenge (Betriebsoptimum) und die niedrigsten Durchschnittskosten.

7.2 Beurteilen Sie unter Nutzung eines digitalen Hilfsmittels die Wirtschaftlichkeit der Produktion auf der Grundlage der Wirtschaftlichkeitsfunktion W .

7.3 Beschreiben Sie die Gewinnsituation des Monopolisten.

7.4 Beurteilen Sie unter Nutzung eines digitalen Hilfsmittels die Umsatzrentabilität des Monopolisten auf der Basis der Funktion U .

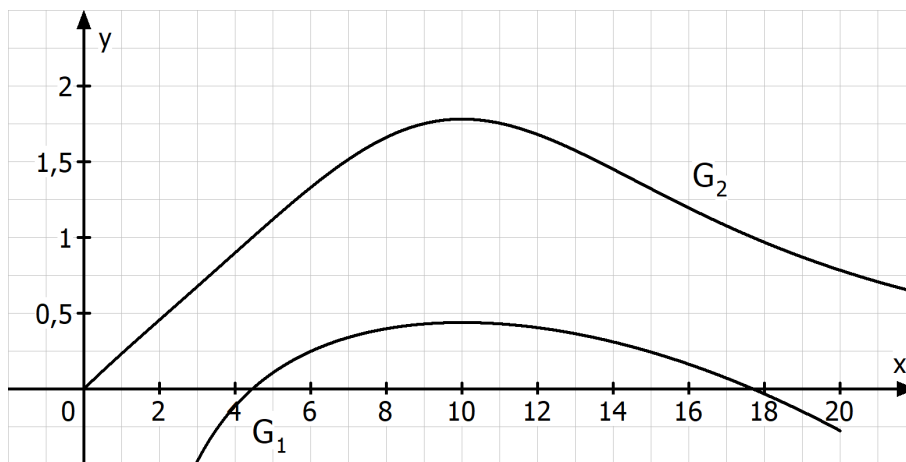
7.5 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen K und k sowie der Funktionen W und U jeweils in ein gemeinsames Koordinatensystem.

8.0 Ein Unternehmen fertigt seine Produkte gemäß einer Kostenfunktion K mit

$$K(x) = 0,25x^3 - 3x^2 + 12,5x + 200 \quad (x \text{ in ME und } K \text{ in GE})$$

und verkauft sie zu einem Preis von 49 GE. ●

8.1 Bestimmen Sie die Gleichungen der Funktionen W der Wirtschaftlichkeit und U der Umsatzrentabilität. Ordnen Sie die Gleichungen den untenstehenden Graphen zu.



8.2 Lesen Sie mithilfe der Graphen die Ausbringungsmenge ab, bei der jeweils die Wirtschaftlichkeit und die Umsatzrentabilität des Unternehmens am größten sind und geben Sie diese an.

8.3 Beschreiben und interpretieren Sie beide Graphen und geben Sie die Bedeutung der beiden Nullstellen der Funktion U für die Gewinnzone des Unternehmens an.

Lösungen:

1a)

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$

Art der Definitionslücke: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{5x - 2} = \frac{(x-2)(x+3)}{5x-2}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{5}$ ist eine Polstelle 1. Ordnung

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

Symmetrieverhalten:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 6}{5(-x) - 2} = \frac{x^2 - x - 6}{-5x - 2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

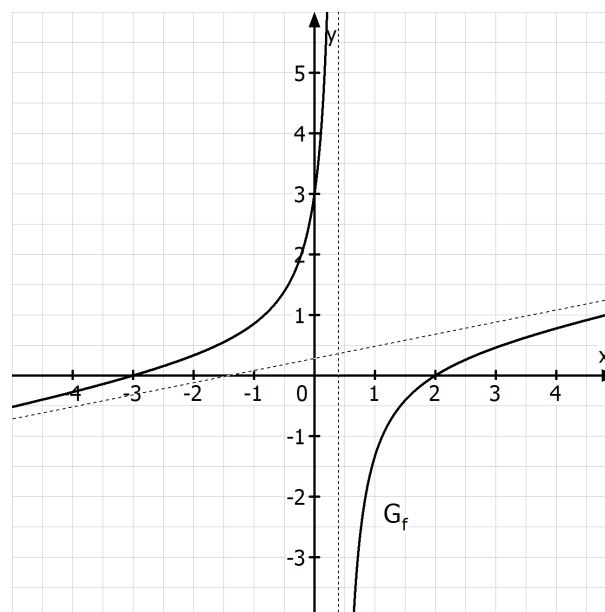
$\Rightarrow G_f$ ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$(x^2 + x - 6) : (5x - 2) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{25} + \frac{-5\frac{11}{25}}{5x - 2}$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{25}$ ist schiefe Asymptote

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-0,52	-0,27	0	0,33	0,86	3	-1,33	0	0,46	0,78



1b)

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

Art der Definitionslücke: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$

$\Rightarrow x = -2$ ist eine Polstelle 1. Ordnung und $x = 1$ ist eine stetig behebbare Definitionslücke

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x=1) \notin D \Rightarrow$ keine Nullstelle

Symmetrieverhalten:

$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 1}{(-x)^2 + (-x) - 2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow G_f$ ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

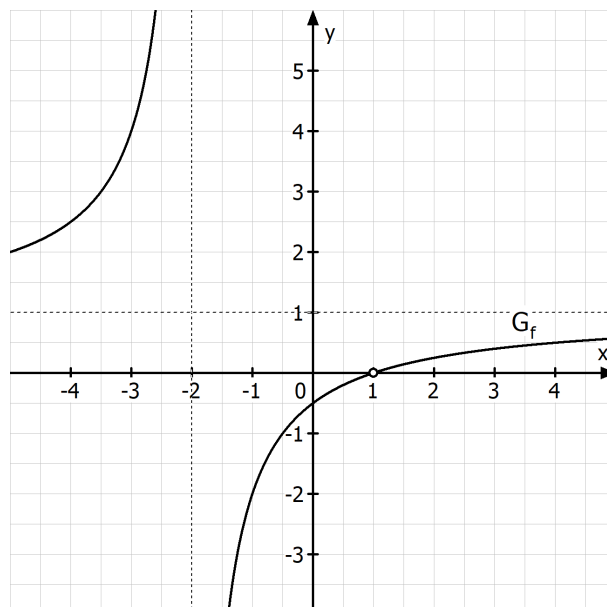
Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$(x^2 - 2x + 1) : (x^2 + x - 2) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + x - 2}$

$\Rightarrow y = 1$ ist waagrechte Asymptote

(kein Schnittpunkt mit der Asymptote, da $\frac{-3x+3}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow x = 1 \notin D$)

x	-6	-5	-4	-3	-1	0	2	3
f(x)	1,75	2	2,5	4	-2	-0,5	0,25	0,4



1c)

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 2\}$

Art der Definitionslücke: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}$

$\Rightarrow x=2$ ist eine Polstelle 1. Ordnung und

$x=1$ und $x=-2$ sind stetig behebbare Definitionslücken

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad (x_2 = 1) \notin D \quad (x_3 = -2) \notin D$$

Symmetrieverhalten:

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)-2} = \frac{-x}{-x-2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

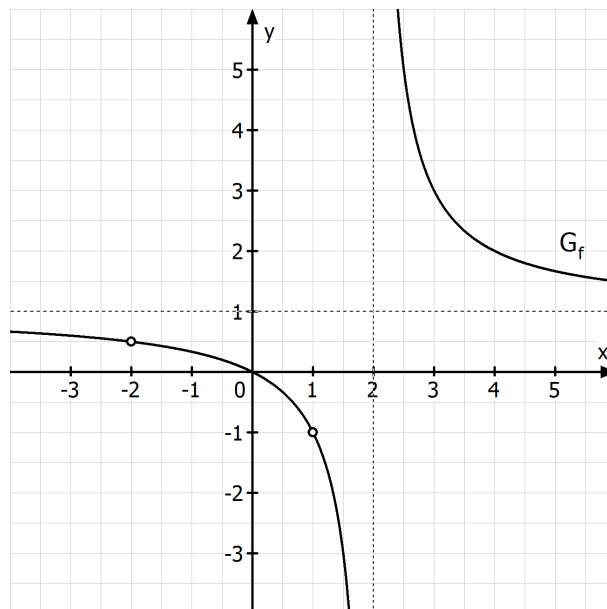
$\Rightarrow G_f$ ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$(x^3 + x^2 - 2x) : (x^3 - x^2 - 4x + 4) = 1 + \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

$\Rightarrow y=1$ ist waagrechte Asymptote

(kein Schnittpunkt mit der Asymptote, da $\frac{2x^2 + 2x - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \notin D \quad x_2 = -2 \notin D$)



1d)

Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Art der Definitionslücke: $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2 + 1)}{x-3} = x^2 + 1$

$\Rightarrow x = 3$ ist eine stetig behebbare Definitionslücke

Stetige Fortsetzung der Funktion f :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 3 \\ 10 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow (x=3) \notin D \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

Symmetrieverhalten:

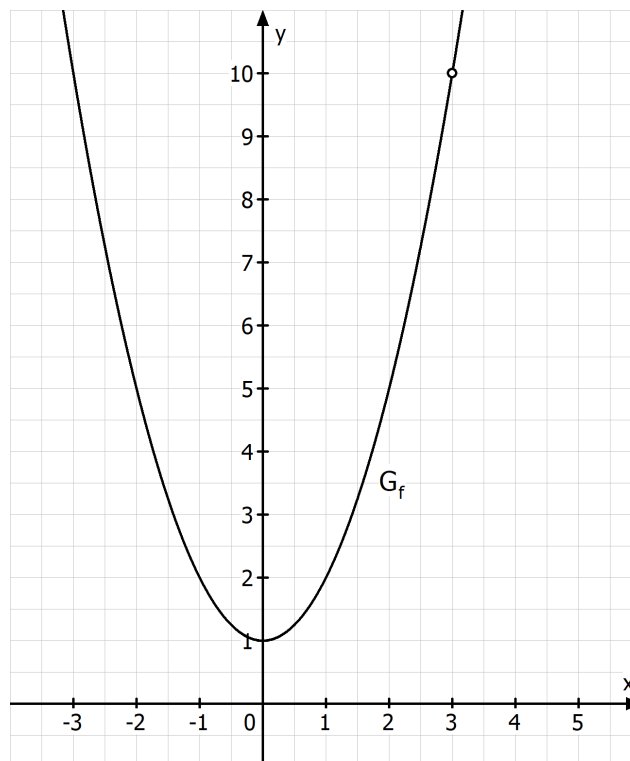
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)^2 + (-x) - 3}{(-x) - 3} = \frac{-x^3 - 3x^2 - x - 3}{-x - 3} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow G_f$ ist weder achsensymmetrisch zur y -Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3) = x^2 + 1$$

$\Rightarrow y = x^2 + 1$ ist Grenzasymptote



2)

$$\begin{aligned}
 (1) \ g(x) &= \frac{x+2}{x^2-1} & (2) \ f(x) &= \frac{x^2-1}{x} & (3) \ h(x) &= \frac{x^2+1}{x^2-1} \\
 (4) \ f(x) &= \frac{x^2}{x+0,5} & (5) \ g(x) &= \frac{x}{x^2-4} & (6) \ h(x) &= \frac{x^2-1}{x^2-4} \\
 (7) \ h(x) &= \frac{x^2-1}{x^2+1} & (8) \ g(x) &= \frac{x-1}{x^2+0,5} & (9) \ f(x) &= \frac{x^2+0,5}{x+0,5}
 \end{aligned}$$

3.1

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \frac{2(-x)}{(-x)^2-4} = -\frac{1}{2}x - \frac{2x}{x^2-4} = -f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

3.2

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow -\infty & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow -\infty \\
 x \rightarrow +\infty & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow +\infty \\
 x \xrightarrow{<} -2 & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow -\infty \\
 x \xrightarrow{>} -2 & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow +\infty \\
 x \xrightarrow{<} 2 & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow -\infty \\
 x \xrightarrow{>} 2 & \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

$x = -2$ und $x = 2$ Polstellen 1. Ordnung

Asymptoten: $x = -2$ $x = 2$ $y = \frac{1}{2}x$

$$3.3 \quad \frac{1}{2}x + \frac{2x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \cdot (x^2-4) + 2x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (dreifach)}$$

3.4

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{1}{2} + \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2} \\
 \Rightarrow (x^2 - 4)^2 &= 4x^2 + 16 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 4x^2 + 16 \Rightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \\
 \Rightarrow x^2(x^2 - 12) &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{12} \quad x_3 = \sqrt{12} \\
 \text{VZU von } f': &
 \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ TEP } \text{TEP}(0/0)$$

$$x = -\sqrt{12} \text{ HOP } \text{HOP}(-\sqrt{12}/-1,5\sqrt{3})$$

$$x = \sqrt{12} \text{ TIP } \text{TIP}(\sqrt{12}/1,5\sqrt{3})$$

3.5

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-4x \cdot (x^2 - 4)^2 - (-2x^2 - 8) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\
 &= \frac{-4x \cdot (x^2 - 4) - 4x \cdot (-2x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3} \\
 \Rightarrow \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3} &= 0 \Rightarrow 4x^3 + 48x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\
 \text{VZU von } f'': &
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; -2[\text{ sowie in } [0; 2[$$

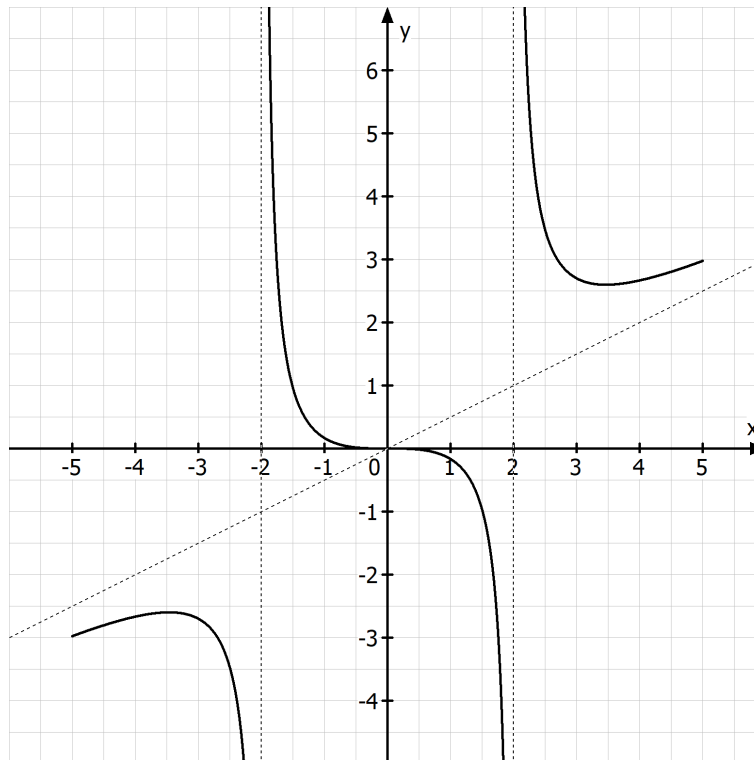
$$G_f \text{ linksgekrümmt in }]-2; 0] \text{ sowie in }]2; \infty[$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ WP } \text{TEP}(0/0)$$

3.6

x	-5	-2,25	-1,75	0	1,75	2,25	5
f(x)	-2,98	-5,36	2,86	0	-2,86	5,36	2,98

3.7



4)

- a) 11 b) 4 c) 9 d) 6 e) 5 f) 12
 g) 7 h) 8 i) 10 k) 1 l) 2 m) 3

5)

$$f(x) = a \cdot \frac{(x+2) \cdot x^2 \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1)^2}$$

$$P(5/1) \text{ einsetzen: } 1 = a \cdot \frac{7 \cdot 25 \cdot 2}{7 \cdot 16} \Rightarrow a = \frac{8}{25}$$

$$f(x) = \frac{8}{25} \cdot \frac{(x+2) \cdot x^2 \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1)^2}$$

6) $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)^2}$ $g(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)^3}$

7.1

Betriebsoptimum:

Stelle, an der der Betrieb am kostengünstigsten produziert,
d.h. die Stelle, an der die Stückkosten am geringsten sind.

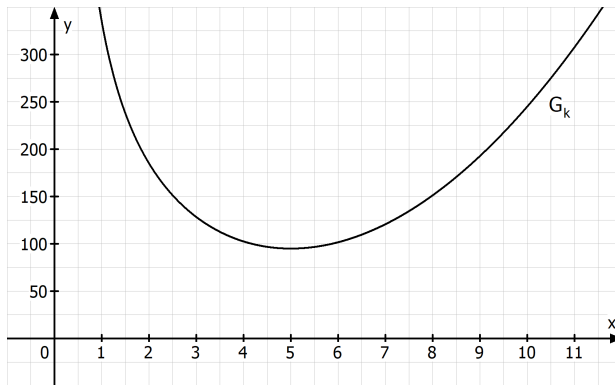
Stückkosten k : $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$$k(x) = \frac{5x^3 - 40x^2 + 120x + 250}{x} = 5x^2 - 40x + 120 + \frac{250}{x}$$

$$k'(x) = 10x - 40 - \frac{250}{x^2}$$

$$10x - 40 - \frac{250}{x^2} = 0 \Rightarrow 10x^3 - 40x^2 - 250 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (siehe Zeichnung)}$$

Die kostengünstigste Produktionsmenge beträgt 5 ME und die niedrigsten Durchschnittskosten betragen dann $k(5) = 95$ GE.



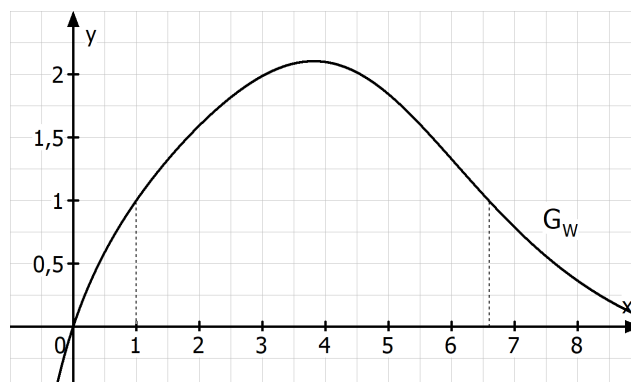
7.2

Wirtschaftlichkeit: $W(x) = \frac{E(x)}{K(x)}$

$$W(x) = \frac{x \cdot p(x)}{K(x)} = \frac{375x - 40x^2}{5x^3 - 40x^2 + 120x + 250}$$

Die Produktion ist wirtschaftlich in $[1, 6,6]$ (siehe Zeichnung)

Wenn ca. 3,8 ME produziert werden, ist die Wirtschaftlichkeit am größten, dort beträgt der Erlös das 2,1-fache der Kosten.

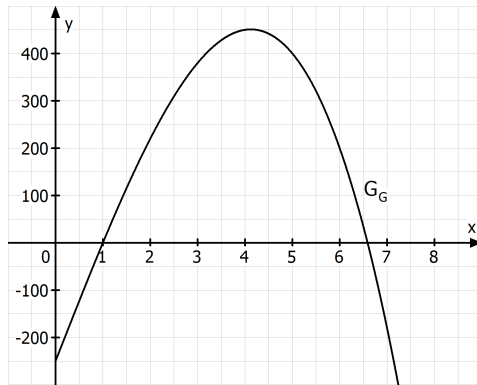


7.3

$$G(x) = E(x) - K(x) = 375x - 40x^2 - 5x^3 + 40x^2 - 120x - 250 = -5x^3 + 255x - 250$$

Die Gewinnzone $[1; 6,6]$ stimmt mit dem Intervall überein, in dem die Wirtschaftlichkeit $W \geq 1$ ist.

Das Gewinnmaximum liegt im Punkt $(4,1 | 450)$ (siehe Zeichnung)



7.4

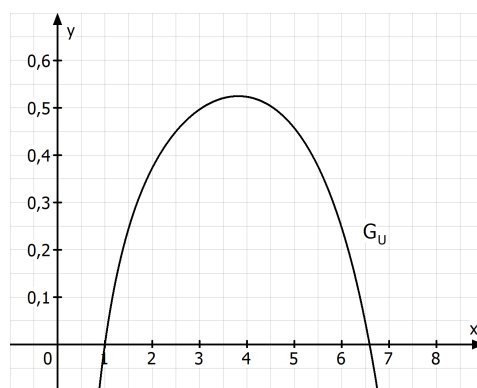
Umsatzrentabilität:

Quotient aus Gewinn und Erlös und gibt an, welcher Bruchteil vom Erlös auf den Gewinn fällt.

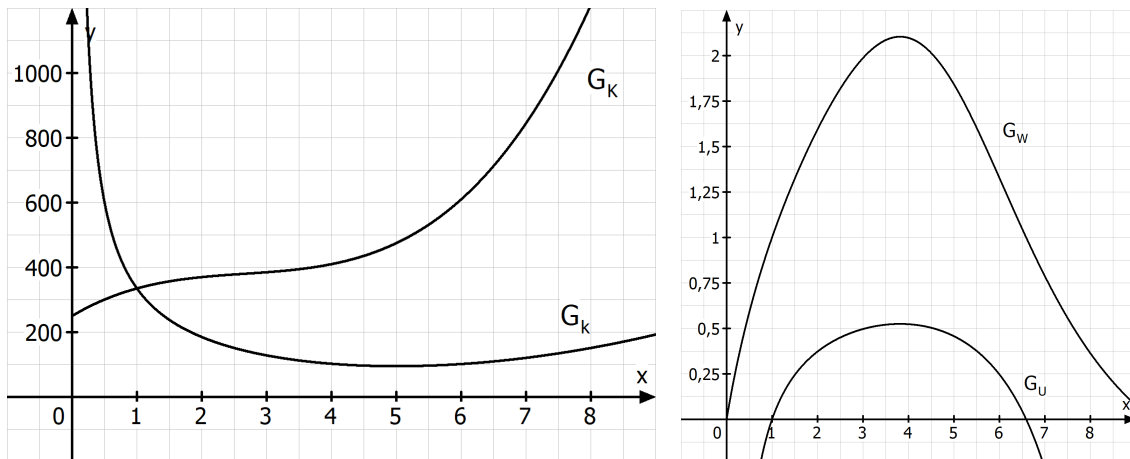
$$U(x) = \frac{G(x)}{E(x)} = \frac{-5x^3 + 255x - 250}{375x - 40x^2}$$

Die Umsatzrentabilität ist in der Gewinnzone positiv.

Sie erreicht ihr Maximum dort, wo auch die Wirtschaftlichkeit maximal ist, also bei ca. 3,8. Dort beträgt die Umsatzrentabilität ca. 0,5, d.h. das der Gewinn 50 % der Erlöse ausmacht. (siehe Zeichnung)



7.5



8.1

$$W(x) = \frac{E(x)}{K(x)} = \frac{49x}{0,25x^3 - 3x^2 + 12,5x + 200}$$

$$U(x) = \frac{G(x)}{E(x)} = \frac{-0,25x^3 + 3x^2 + 36,5x - 200}{49x}$$

Graph 1 ist G_U , weil immer $G(x) < E(x)$ gilt und damit

$U(x)$ immer kleiner 1 sein muss.

Graph 2 ist dann G_W .

- 8.2 Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME arbeitet das Unternehmen maximal wirtschaftlich. Dabei entspricht der Erlös dem 1,78-fachen der Kosten.
 Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME ist die Umsatzrentabilität des Unternehmens maximal. Dabei macht der Gewinn etwa 44 % des Erlöses aus. Die beiden Maxima von der Wirtschaftlichkeit und der Umsatzrentabilität befinden sich bei der selben Ausbringungsmenge (10 ME).

- 8.3 Der Graph von W startet immer im Koordinatenursprung, steigt streng monoton bis zu seinem Maximum, fällt danach streng monoton und schmiegt sich an die x-Achse an, die er nie erreicht. Die Gerade $y = 1$ schneidet G_W zweimal an den Stellen, an denen $E(x) = K(x)$ und somit $W(x) = 1$ gilt.
 Da an diesen beiden Stellen $E(x) = K(x)$ und somit $G(x) = 0$ ist, gilt dort auch $U(x) = 0$.
 Der Graph von U kommt aus dem „Negativ-Unendlichen“, schneidet die x-Achse an der Stelle, an der $G(x) = 0$ ist und steigt streng monoton bis zu seinem Maximum. Danach fällt G_U ins „Negativ-Unendliche“ und schneidet dabei die x-Achse ein zweites Mal.
 Da $U(x)$ die x-Achse an den Stellen schneidet, an denen $G(x) = 0$ gilt, entspricht die Zone zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnzone, die erste Nullstelle ist also die Gewinnschwelle, die zweite Nullstelle die Gewinngrenze. Die beiden Maxima von U und W liegen an derselben Stelle, also bei derselben Ausbringungsmenge.